第 9 講　三角・指数・対数関数の導関数，高次導関数

PART1　三角関数の導関数

要点整理と公式

要点 ①　三角関数の導関数

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=\quad$ であることを用いて，$y=\sin x$ の導関数を求める。

$$(\sin x)'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right)$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h(1+\cos h)}=\lim_{h\to0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}=\quad\cdot\frac{\quad}{1+\quad}=\quad$ より

$$(\sin x)'=(\cos x)\cdot\quad-\sin x\cdot\quad=\cos x$$

したがって $(\sin x)'=\cos x$

次に，合成関数の微分法を用いて，$y=\cos x$ の導関数を求める。

$$(\cos x)'=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}'=\qquad\qquad\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'=-\sin x\cdot1=-\sin x$$

したがって $(\cos x)'=-\sin x$

さらに，商の微分法の公式を用いて，$y=\tan x$ の導関数を求める。

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\quad\cos x-\sin x(\qquad)}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

したがって $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

以上より，次の公式が成り立つ。

三角関数の導関数

$(\sin x)' = \cos x$　　$(\cos x)' = -\sin x$　　$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(ex) $y = \sin^2 x$ の導関数について

$y = (\sin x)^2$ より

$y' = \qquad \cdot \qquad =$

$y = \dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$ より

$y' = -\dfrac{1}{2} \cdot \qquad \cdot \qquad =$

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y=\cos^3 x$

(3) $y=\dfrac{1}{\tan x}$

(4) $y=\sin x\cos x$

Point Pickup

三角関数の導関数

$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

第 9 講　PART1 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$y'=$ ［ア］

① $-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　② $2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

③ $-2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$　④ $-2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

2　$y=\sin^3 x$

$y'=$ ［イ］

① $3\sin^2 x$　② $3\cos^2 x$

③ $3\sin^2 x\cos x$　④ $-3\sin^2 x\cos x$

3　$y=\dfrac{1}{\tan^2 x}$

$y'=$ ［ウ］

① $-\dfrac{1}{\tan x}$　② $-\dfrac{2}{\tan^3 x}$

③ $\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$　④ $-\dfrac{2\cos x}{\sin^3 x}$

4　$y=\cos x+x\sin x$

$y'=$ ［エ］

① $x\sin x$　② $x\cos x$

③ $-x\cos x$　④ $\sin x-x\cos x$

第 9 講 三角・指数・対数関数の導関数，高次導関数

PART1 三角関数の導関数

1 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y=\cos^3 x$

(3) $y=\dfrac{1}{\tan x}$

(4) $y=\sin x\cos x$

[解答]

(1) $y'=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)'=3\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $y'=3\cos^2 x\cdot(\cos x)'=-3\cos^2 x\sin x$

(3) $y'=-\dfrac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\dfrac{1}{\tan^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=-\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(4) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

（別解）$y=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ より　$y'=\dfrac{1}{2}\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x$

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$y'=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)'$ [A]

$=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

[A]　$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

2

[正解] イ：③

[解説]

$y'=3\sin^2 x\cdot(\sin x)'$ [B]

$=3\sin^2 x\cos x$

[B]　$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$

3

[正解] ウ：④

[解説]

$y=(\tan x)^{-2}$ であるから，

$y'=-2(\tan x)^{-3}\cdot(\tan x)'$ [C]

$=-\frac{2}{\tan^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

$=-2\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$

$=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$

[C]　$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

4

[正解] エ：②

[解説]

$y'=(\cos x)'+(x\sin x)'$

$=-\sin x+(x)'\sin x+x\cdot(\sin x)'$ [D]

$=-\sin x+1\cdot\sin x+x\cdot\cos x$

$=x\cos x$

[D]
$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$